UNIVERSIDAD SIMON BOLIVAR
Departamento de Matemáticas
Puras y Aplicadas.

MA1112 ABRIL-JULIO DE 2006
tercer examen parcial (40%)
11-07-2006

TIPO A

1.- Calcule las siguientes integrales :

a)(10 ptos.) $\displaystyle\int \frac{x^2-2x-3}{(x-1)(x^2+2x+2)}\,dx$; **b)(5 ptos.)** $\displaystyle\int \frac{1}{e^x+1}\,dx$;

c)(5 ptos.) $\displaystyle\int (x+2).e^{x-1}dx$; **d)(5 ptos.)** $\displaystyle\int_0^4 \frac{dx}{\sqrt{4-x}}$.

2.-(5 ptos.) Calcule el siguiente límite : $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}(1-e^{-x})^{(e^x)}$.

3.- (10 ptos.) Considere el volumen del sólido de revolución que se genera cuando la figura plana limitada por las dos curvas de ecuaciones : $y = 4x^2$, $y = 4\sqrt{x}$ gira alrededor de la recta de ecuación $x = -1$.
3a) (4 ptos.) **Represente** el volumen descrito **usando integrales**, con el método de discos y/o arandelas ;
3b) (4 ptos.) **Represente** el volumen descrito **usando integrales**, con el método de **l**os cascarones ;
3c) (2 ptos) Calcule el volumen [con el método que Usted prefiera].

S O L U C I O N E S

a)(10 ptos.) $\mathbf{I}_a = \displaystyle\int \frac{x^2-2x-3}{(x-1)(x^2+2x+2)}\,dx$;

$$\frac{x^2-2x-3}{(x-1)(x^2+2x+2)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B+Cx}{x^2+2x+2} \Rightarrow \frac{x^2-2x-3}{(x-1)(x^2+2x+2)} = \frac{A(x^2+2x+2)+(B+Cx)(x-1)}{(x-1)(x^2+2x+2)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2-2x-3 = A(x^2+2x+2)+(B+Cx)(x-1) = (A+C)x^2+(2A+B-C)x+(2A-B) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} A+C=1 \\ 2A+B-C=-2 \\ 2A-B=-3 \end{cases}$$ además, como $x = 1 \Rightarrow -4 = 5A+(B+C)(1-1) = 5A$, se tiene :

$A = -\dfrac{4}{5}$, $C = 1-A = \dfrac{9}{5}$, $B = 2A+3 = \dfrac{7}{5}$. Por lo tanto se tiene :

$$\mathbf{I}_a = -\frac{4}{5}\int\frac{dx}{x-1} + \frac{1}{5}\int\frac{7+9x}{x^2+2x+2}\,dx\ ; \quad x^2+2x+2=(x+1)^2+1 = u^2+1 \text{ con } u = x+1\ ;$$

$$\int \frac{7+9x}{x^2+2x+2}\,dx = \int \frac{-2+9u}{u^2+1}\,dx = -2\arctan(u) + \frac{9}{2}\ln(u^2+1) + k$$ así que en definitiva :

$$\mathbf{I}_a = -\frac{4}{5}\int \frac{dx}{x-1} + \frac{1}{5}\int \frac{7+9x}{x^2+2x+2}\,dx = -\frac{4}{5}\ln|x-1| + \frac{9}{10}\ln(x^2+2x+2) - \frac{2}{5}\arctan(x+1)+K\ .$$

b)(5 ptos.) $\mathbf{I}_b = \int \frac{1}{e^x+1}\,dx = \int \frac{e^{-x}}{1+e^{-x}}\,dx$ = [poniendo $e^{-x}= u$]

$$\int \frac{-\,du}{1+u} = -\ln|1+u| = -\ln(1+e^{-x}) = -\ln(1+\frac{1}{e^x}) = \ln(\frac{e^x}{1+e^x}) = x - \ln(1+e^x) + K\ .$$

Otra posible manera sencilla de calcular la misma integral es la siguiente :
poniendo $v = e^x$, se tiene $dv = e^x dx$; $dx = dv/v$, $\frac{1}{e^x+1}\,dx = \frac{1}{1+v}\frac{dv}{v}$ luego :

$$\mathbf{I}_b = \int \frac{dv}{v(v+1)} = \int \frac{A\,dv}{v} + \int \frac{B\,dv}{v+1}) = \int \frac{dv}{v} - \int \frac{dv}{v+1} = \ln|v| - \ln|v+1| =$$

$$= \ln(e^x) - \ln|e^x+1| = x - \ln|e^x+1| + K.$$

c)(5 ptos.) $\mathbf{I}_c = \int(x+2).e^{x-1}dx = \frac{1}{e}\int(x+2).e^x dx =$

[por partes, con $u=x+2$, $v' = e^x$] $= \frac{1}{e}\,[(x+2).e^x - \int e^x dx\,] = \frac{e^x}{e}\,[(x+2) - 1] = (x+1)e^{x-1} + K$.

d)(5 ptos.) $\mathbf{I}_d = \int_0^4 \frac{dx}{\sqrt{4-x}}$. [**ojo : es una integral impropia**] .

$$\mathbf{I}_d = \lim_{b\to 4^-} \int_0^b \frac{dx}{\sqrt{4-x}} = \lim_{b\to 4^-} [\,-2\sqrt{4-x}\,]_0^b = \lim_{b\to 4^-} [\,-2\sqrt{4-b} + 4\,] = 4\ .$$

La integral impropia dada es convergente y su valor es 4 .

2.-(5 ptos.) $\lim_{x\to+\infty}(1 - e^{-x})^{(e^x)} = L$; $\ln(L) = \lim_{x\to+\infty}\ln[(1 - e^{-x})^{(e^x)}] =$

$$= \lim_{x\to+\infty}(\,e^x\ln(1 - e^{-x})\,) = \lim_{x\to+\infty}(\frac{\ln(1 - e^{-x})}{e^{-x}}) \underset{(v=e^{-x})}{=} \lim_{v\to 0}(\frac{\ln(1 - v)}{v}) \underset{(\text{Hopîtal})}{=}$$

$$= \lim_{v\to 0}(\frac{-1/(1-v)}{1}) = -1 = \ln(L) \quad \Rightarrow \quad L = \frac{1}{e}\ .$$

3.- (10 ptos.) Considere el volumen del sólido de revolución que se genera cuando la figura plana limitada por las dos curvas de ecuaciones : $y = 4x^2$, $y = 4\sqrt{x}$ gira alrededor de la recta de ecuación $x = -1$.

3a) (4 ptos.) **Represente** el volumen descrito **usando integrales**, con el método de discos y/o arandelas ;

Con referencia a la figura #1 se tiene : $V = \pi \int_{y_O}^{y_A} (R^2 - r^2)\, dy$,

con $R = \frac{\sqrt{y}}{2} - (-1) = \frac{\sqrt{y}}{2} + 1$; $r = \frac{y^2}{16} - (-1) = \frac{y^2}{16} + 1$; $y_O = 0$, $y_A = 4$, ya que el punto de intersección de los dos arcos de parábola, distinto del origen, es A(1, 4) ;

Por lo tanto $V = \pi \int_0^4 \left[\left(\frac{\sqrt{y}}{2} + 1 \right)^2 - \left(\frac{y^2}{16} + 1 \right)^2 \right] dy$.

3b) (4 ptos.) **Represente** el volumen descrito **usando integrales**, con el método de **l**os cascarones ;

Con referencia a la figura #2 se tiene : $V = 2\pi \int_{x_O}^{x_A} (y_2 - y_1) r\, dx$, con $y_1 = 4x^2$, $y_2 = 4\sqrt{x}$,

$r = x - (-1) = x + 1$, $x_O = 0$, $x_A = 1$, por lo cual se tiene :

$$V = 2\pi \int_0^1 (4\sqrt{x} - 4x^2)(x+1)\, dx \text{ .}$$

3c) (2 ptos) Calcule el volumen [con el método que Usted prefiera].

3ca) Calculando el volumen con el método de discos y/o arandelas se tiene :

$\left(\frac{\sqrt{y}}{2} + 1) \right)^2 - \left(\frac{y^2}{16} + 1 \right)^2 = \frac{y}{4} + y^{1/2} - \frac{y^4}{256} - \frac{y^2}{8}$, luego :

$$V = \pi \int_0^4 \left[\left(\frac{\sqrt{y}}{2} + 1 \right)^2 - \left(\frac{y^2}{16} + 1 \right)^2 \right] dy = \pi \int_0^4 \left[\frac{y}{4} + y^{1/2} - \frac{y^4}{256} - \frac{y^2}{8} \right] dy =$$

$$= \pi \left[\frac{y^2}{8} + \frac{2}{3} y^{3/2} - \frac{y^5}{5.256} - \frac{y^3}{24} \right]_0^4 = \pi \left[2 + \frac{16}{3} - \frac{4}{5} - \frac{8}{3} \right] = \frac{58}{15} \pi \text{ .}$$

3cb) Calculando el volumen con el método de los cascarones se tiene :

$$V = 2\pi \int_0^1 (4\sqrt{x} - 4x^2)(x+1)\, dx = 2\pi \int_0^1 (4x^{3/2} + 4x^{1/2} - 4x^3 - 4x^2)\, dx =$$

$$= 2\pi \left[\frac{8}{5} x^{5/2} + \frac{8}{3} x^{3/2} - x^4 - \frac{4}{3} x^3 \right]_0^1 = 2\pi \left[\frac{8}{5} + \frac{8}{3} - 1 - \frac{4}{3} \right] = \frac{58}{15} \pi \text{ .}$$